PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN H_2 DAN H_∞

Robertus Heri Soelistyo
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP
Jl. Prof. Soedarto, Tembalang Semarang.

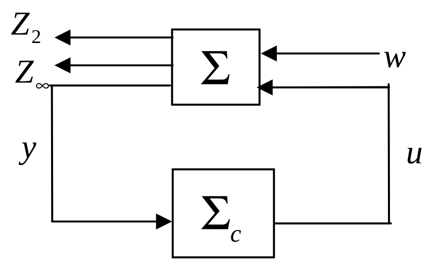
Abstract. This paper considers the mix-norm H_2/H_∞ standard problem. Specifically an LQG control design problem involving a constraint on H_∞ disturbance attenuation is addressed. It is shown that the H_2/H_∞ dynamic compensator gains are completely characterized via coupled Riccati/Lyapunov equation. The principle result involves a sufficient condition for characterizing full order guaranteeing closed loop stability, a constrained H_∞ disturbance attenuation and an optimized H_2 performance bound.

Keywords: mixed-norm H_2/H_∞, closed loop stability, H_∞ disturbance attenuation, an optimized H_2 performance bound.

1. PENDAHULUAN

Sistem kontrol berumpan balik (*feedback control sistem*) adalah sistem kontrol yang menjaga hubungan antara masukan dan keluaran dan membanding-kannya dengan menggunakan selisihnya sebagai alat pengontrolan. Sedangkan sistem kotrol lup tertutup merupakan sis-tem kontrol yang sinyal keluarannya ber-pengaruh langsung pada aksi pengontrolan. Jadi sistem kontrol lup tertutup termasuk sistem kontrol berumpan balik. Dalam sistem kontrol lup tertutup, fungsi pengon-trol sangatlah penting untuk memperkecil kesalahan dan membuat agar keluaran sis-tem mendekati harga yang diinginkan.

Salah satu cara untuk mencari pe-ngontrol adalah dengan teori kontrol campuran H_2/H_∞. Latar belakang yang mendasari kontrol campuran H_2/H_∞, ada-lah adanya dua persoalan utama dalam desain sistem kontrol. Pertama optimisasi performansi yang diinginkan. Kedua, pen-ting untuk disadari bahwa model selalu menyatakan suatu nominal sistem se-mentara sistem yang sebenarnya merupa-kan subyek ketidakpastian. Untuk keperlu-an itulah, kedua aspek ini harus diako-modasi dalam desain sistem kontrol yang sama yaitu sistem kontrol campuran H_2/H_∞, yang terdiri dari optimasi norma H_2 dari suatu fungsi alih lup tertutup, sementara norm norma H_∞ dari fungsi alih yang lain dipaksa untuk kurang dari suatu konstanta yang telah ditentukan. Situasi tersebut dapat digambarkan seperti Gam-bar 1.



Gambar 1. Desain kontrol campuran H_2/H_∞

Dimana $\sum$ adalah sistem *time invariant* dan $\sum_c$ merupakan pengontrolnya. Masa-lah optimal campuran H_2/H_∞ adalah mencari pengontrol $\sum_c$ sedemikian sehingga untuk $\gamma > 0$ $\min\left\{\|T_{zw}\|_2^2 : \|T_{zw}\|_\infty < \gamma\right\}$

2. PERMASALAHAN

Misalkan diketahui plant *P(s)* order n yang *stabilizable* dan *detectable*, dengan model dinamik sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + D_2 w(t).\end{aligned} \qquad (2.1)$$

Masalah teori kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah menentukan pengontrol order n

$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t),$

$u(t) = C_c x_c(t),$

yang memenuhi syarat:

i. Sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik.

ii. fungsi alih *nonstrictly proper* $q_\infty \times d$

$H(s) = \tilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} + E_\infty$

dari $w(t)$ ke

$z_\infty(t) = E_{1\infty} x(t) + E_{2\infty} u(t) + E_\infty w(t)$

memenuhi kendala

$\|H(s)\|_\infty \le \gamma, \gamma > 0$.

iii. Performansifungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t\to\infty} E\left\{x^T(t) R_1 x(t) + 2x^T(t) R_{12} u(t) + u^T(t) R_2 u(t)\right\}$$

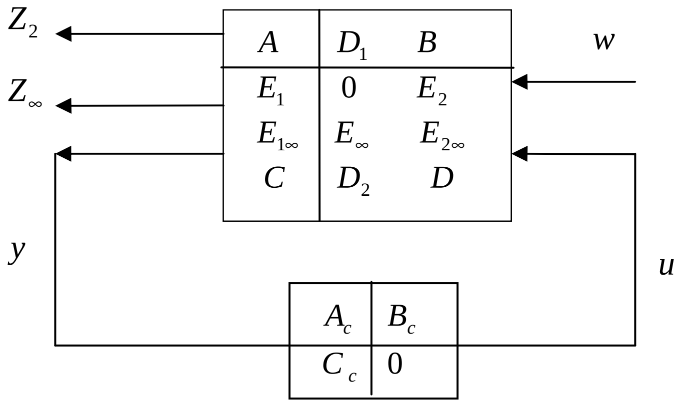
adalah minimal.

3. PENENTUAN SUATU PENGONTROL DENGAN INDEKS PERFORMANSI BERUPA NORMA CAMPURAN H_2 DAN H_∞

3.1. Teori Kontrol LQG dengan kendala Pelemahan Gangguan H_∞

Dalam sub bab ini dibahas teori kontrol LQG dengan kendala pelemahan gangguan H_∞. Tanpa criteria performansi H_2, masalah yang dibahas di sini adalah masalah kontrol baku H_∞ [3,4,5]. Keseluruhan tulisan ini membahas pengontrol berdimensi n dan lup tertutup berdimensi $\tilde{n} = 2n$.

Perhatikan blok diagram masalah baku campuran H_2/H_∞ seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. Lup Tertutup masalah baku norma campuran H_2/H_∞

Misalkan diketahui plant $P(s)$ order n yang *stabilizable* dan *detectable* dengan model dinamik sebagai berikut.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D_1 w(t)$, (3.1)

$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_2 w(t)$, (3.2)

dimana:

w : input sebagai disturbance.

u : input dari pengontrol.

z_2 : output dari plant untuk kasus H_2.

z_∞ : output dari plant untuk kasus H_∞.

y : input pengontrol/output yang terukur.

Permasalahan teori kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah menentukan pengonrol order n:

$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t),$ (3.3)

$u(t) = C_c x_c(t),$ (3.4)

$$K = \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & 0\end{array}\right],$$

yang memenuhi syarat:

i. sistem lup tertutup dari model (2.1) dinamik stabil asimtotik. (3.5)

ii. fungsi alih *nonstrictly proper* $q_\infty \times d$

$H(s) = \tilde{E}_\infty (sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1} \tilde{D} + E_\infty$

dari $w(t)$ ke

$z_\infty(t) = E_{1\infty}x(t) + E_{2\infty}u(t) + E_\infty w(t)$

memenuhi kendala $\|H(s)\|_\infty \le \gamma, \gamma > 0$. (3.6)

iii. performansi fungsional

$$J(A_c, B_c, C_c) = \lim_{t\to\infty} E\left\{x^T(t)R_1x(t) + 2x^T(t)R_{12}u(t) + u^T(t)R_2u(t)\right\}$$

adalah minimal. (3.7)

Sebelum menemukan pengontrol yang memenuhi syarat (3.5)-(3.7), dibahas terlebih dulu beberapa hal sebagai berikut.

Substitusikan (3.4) ke (3.1) dan (3.2) dihasilkan persamaan:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t) \quad . \qquad (3.8)$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + D_2w(t)$$

Kemudian performansi fungsional (3.7) menjadi

$$J(A_c, B_c, C_c) = tr\tilde{Q}\tilde{R}, \qquad (3.9)$$

dengan $\tilde{Q} \cong \lim_{t\to\infty} E\left[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)\right]$, (3.10)

memenuhi persamaan aljabar Lyapunov $\tilde{n}\times\tilde{n}$

$$\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A} + \tilde{V} = 0. \qquad (3.11)$$

Fungsi alih lup tertutp dari $w(t)$ ke $z_2(t) = E_1x(t) + E_2u(t)$ adalah:

$$\tilde{H}(s) = \frac{z_2(s)}{w(s)} = \tilde{E}(sI_{\tilde{n}} - \tilde{A})^{-1}\tilde{D}. \qquad (3.12)$$

Menurut [8], pengontrol (3.3) dan (3.4) *admissible* (diperkenankan) di H_2 sehingga

$$J(A_c, B_c, C_c) = \left\|\tilde{H}(s)\right\|_2^2. \qquad (3.13)$$

Dari uraian di atas ternyata performansi fungsional (3.7) identik dengan fungsi alih dari $w(t)$ ke $z_2(t)$, sehingga masalah kontrol LQG dengan kendala H_∞ identik dengan masalah campuran H_2/H_∞. Artinya, ketika meminumkan performansi (3.7) sama dengan meminimmkan fungsi alih (3.12)

Langkah pertama untuk menyelesaikan masalah kontrol LQG dengan kendala H_∞ adalah melemahkan gangguan H_∞.

Pelemahan gangguan H_∞ (H_∞ *disturbance attenuation*) ini dilakukan dengan mengganti persamaan aljabar Liapunov dengan persamaan aljabar Riccati, seperti dinyatakan dalam Lemma 1.

Lemma 1. Misalkan diberikan (A_c, B_c, C_c) dan asumsikan terdapat $\theta \in \Re^{n\times n}$ yang memenuhi $\theta \in \mathrm{N}^n$ dan

$$\tilde{A}\theta + \theta\tilde{A}^T + \gamma^{-2}(\tilde{D}\tilde{E}_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}\tilde{E}_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T + \tilde{V} = 0 \qquad (3.14)$$

dengan N^n adalah matriks simetris $\tilde{n}\times\tilde{n}$ yang definit non negative.

Maka $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable* jika dan hanya jika $\tilde{A}$ stabil asimtotik.

Dalam kasus ini

$\|H(s)\| \le \gamma$ dan $\tilde{Q} \le \theta$.(3.15) (3.16)

Sehingga $J(A_c, B_c, C_c) = \Im(A_c, B_c, C_c, \theta)$, (3.17)

dimana $\Im(A_c, B_c, C_c, \theta) \cong tr\theta\tilde{R}$. (3.18)

Bukti.

($\Rightarrow$) Dari sistem lup tertutup (3.1)-(3.4) diketahui bahwa $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable* dan $(\tilde{A}, \tilde{C})$ *detectable*. Hal ini mengakibatkan $\tilde{A}$ stabil asimtotik.

($\Leftarrow$) Karena $\tilde{A}$ stabil asimtotik, maka $(\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{C}, D_2)$ stabil asimtotik. Sehingga $(\tilde{A}, \tilde{D})$ *stabilizable*. Untuk membuktikan (3.15), $\tilde{V}$ diganti dengan $\tilde{D}\tilde{D}^T$ dimana

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} V_1 & V_{12}B_c^T \\ B_cV_{12}^T & B_cV_2B_c^T \end{bmatrix}, \qquad \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 \\ B_cD_2 \end{bmatrix},$$

$V_1 = D_1D_1^T$, $V_2 = D_2D_2^T$, $V_{12} = D_1D_2^T$, dan mengurangi serta menambahkan $j\omega I_n\theta$ ke (3.14) sehingga menjadi

$$\tilde{D}\tilde{D}^T = (-\tilde{A} + j\omega I_n)\theta + \theta(-\tilde{A} - j\omega I_n) - \gamma^{-2}(\tilde{D}\tilde{E}_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}\tilde{E}_\infty^T + \theta\tilde{E}_\infty^T)^T. \qquad (3.19)$$

Mengalikan kedua ruas (3.19) dengan $\tilde{E}_\infty(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1}$ dari kiri dan $(j\omega I_n - \tilde{A})^{-1}\tilde{E}_\infty^T$ dari kanan diperoleh:

$$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\tilde{D}\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T$$
$$=\tilde{E}_\infty\theta(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T+\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\theta\tilde{E}_\infty^T$$
$$-\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T \qquad (3.20)$$

Kemudian dengan menjumlahkan kedua ruas (3.20) dengan

$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\tilde{D}E_\infty^T+E_\infty\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T+E_\infty E_\infty^T$

diperoleh

$$\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\tilde{D}\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T+\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\tilde{D}E_\infty^T+E_\infty\tilde{D}^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T+E_\infty E_\infty^T$$
$$=\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\left[\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T\right]+\left[\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T\right]^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T+E_\infty E_\infty^T$$
$$-\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)^T(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-T}\tilde{E}_\infty^T \qquad (3.21)$$

Sementara ruas kiri dan ruas kanan dari (3.21) berturut-turut sama dengan $H(j\omega)H^*(j\omega)$ dan

$S+S^*-\gamma^{-2}SM^{-1}S^*+\gamma^2(I_{q\infty}-M)$,

dimana

$S\cong\tilde{E}_\infty(j\omega I_{\tilde{n}}-\tilde{A})^{-1}\left[\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T\right]$ dan

$M=I_{q\infty}-\gamma^{-2}E_\infty E_\infty^T$.

Sehingga (3.21) menjadi

$$H(j\omega)H^*(j\omega)=-\left[\left(\gamma M^{1/2}-\gamma^{-1}SM^{-1/2}\right)\left(\gamma M^{1/2}-\gamma^{-1}SM^{-1/2}\right)^*\right]+\gamma^2 I_{q\infty}\geq 0$$
.

Untuk membuktikan (3.16) kurangkan (3.11) ke (3.14), diperoleh:

$$\tilde{A}(\theta-\tilde{Q})+(\theta-\tilde{Q})\tilde{A}^T+\gamma^{-2}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)M^{-1}(\tilde{D}E_\infty^T+\theta\tilde{E}_\infty^T)^T=0$$
.

Karena $\tilde{A}$ stabil asimtotik, hal ini ekivalen dengan $\theta-\tilde{Q}\geq 0$, sehingga

$J(A_c,B_c,C_c)\leq\Im(A_c,B_c,C_c,\theta)$.

Jadi terbukti $\Im(A_c,B_c,C_c,\theta)\cong tr\theta\tilde{R}$. ■

Lemma 1 menunjukkan bahwa pelemahan ganguan H_∞ dengan sendirinya menguat ketika solusi definit untuk (3.14) ada dan $\tilde{A}$ stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa syarat pertama dan kedua telah dipenuhi.

Untuk memenuhi syarat ketiga dari masalah kendali LQG dengan kendala H_∞, yaitu meminimalkan performansi fungsional $J(A_c,B_c,C_c)$, akan dibahas terlebih dahulu Lemma 2 berikut, yang menjamin eksistensi solusi tunggal yang definit non negative untuk (3.14) jika (3.15) terpenuhi.

Sedemikian sehingga nilai eigen $\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty+\gamma^{-2}\theta E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty$ berada di bagian real sebelah kiri.

Lemma 2. Misal diberikan (A_c,B_c,C_c), dan $\tilde{A}$ adalah stabil asimtotik dan asumsikan pelemahan gangguan (3.15) dipenuhi. Maka terdapat solusi tunggal θ yang definit non negative yang memenuhi (3.14)

Bukti.

Bentuk (3.14) ekivalen dengan

$$\left(\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty\right)\theta+\theta\left(\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty\right)^T+\gamma^{-2}\theta\tilde{E}_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty^T\theta+\tilde{D}N^{-1}\tilde{D}^T$$
.

Misalkan θ adalah solus yang definit nonnegative, menurut [2, Teorema 23-3] dengan $\mathrm{A}^T=\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty$ dan $-\mathrm{KBB}^T=\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty\theta$. Akan dibuktikan

$\mathrm{Re}\lambda(\mathrm{A}-\mathrm{BB^TK})=\mathrm{Re}\lambda(\mathrm{A}-\mathrm{BB^TK})^{\mathrm{T}}<0$.

Misalkan terdapat θ_1 dan θ_2 dengan $\theta_1\neq\theta_2$ sedemikian sehingga

$\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty+\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty\theta_1$ dan

$\tilde{A}+\gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty+\gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^TM^{-1}\tilde{E}_\infty\theta_2$

memiliki nilai eigen di sebelah kiri sumbu imajiner, sehingga menurut [2, Teorema 23-2] solusi dari

$$\dot{x}(t) = \tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty \theta_i,\ i = 1,2$$

dengan $x(0) = x_0$ mendekati nol untuk $t \to \infty$.

Menurut [2,Teorema 22-2 dan Lemma 21-1],

$$\int_0^t \left(u^T(\sigma)u(\sigma) + x^T(\sigma)\tilde{D}N^{-1}\tilde{D}^T x(\sigma) \right) d\sigma$$

$$= x^T(0)\theta_1 x(0) - x^T(t)\theta_1 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T\theta_1 x(t) \right\|^2 dt$$

$$= x^T(0)\theta_2 x(0) - x^T(t)\theta_2 x(t) + \int_0^t \left\| u(t) + B^T\theta_1 x(t) \right\|^2 dt$$

Karena $\theta_1 \neq \theta_2$ dan keduanya simetris sehingga terdapat x_0 sedemikian sehingga $x_0^T\theta_1 x_0 \geq x_0^T\theta_2 x_0$.

Misalkan $x_0^T\theta_1 x_0 > x_0^T\theta_2 x_0$ dan $u(t) = -B^T\theta_2 x(t)$. Untuk $t \to \infty$, dihasilkan

$$x_0^T\theta_2 x_0 = x_0^T\theta_1 x_0 + \int_0^\infty \left\| B^T(\theta_1 - \theta_2)x(t) \right\|^2 dt .$$

Kontradiksi dengan $x_0^T\theta_1 x_0 \geq x_0^T\theta_2 x_0$. Sehingga pengandaian salah.

Jadi terdapat dengan tunggal θ yang definit non negatif yang memenuhi (3.14) sedemikian sehingga nilai eigen

$$\tilde{A} + \gamma^{-2}\tilde{D}E_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty + \gamma^{-2}\theta\tilde{E}_\infty^T M^{-1}\tilde{E}_\infty$$

berada di bagian real sebelah kiri. ■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2, diketahui bahwa penggantian (3.11) dengan (3.14) membuktikan kestabilan lup tertutup, pengurangan/pelemahan gangguan H_∞, dan batas atas untuk criteria performansi H_2. Artinya, misalkan diberikan pengontrol (A_c, B_c, C_c) dimana terdapat solusi definit non negative untuk (3.15), criteria performansi $J(A_c, B_c, C_c)$ dari pengontrol dijamin tidak lebih buruk dari $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$. Karena itu $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ dapat diinterpretasikan sebagai alat bantu untuk mengarahkan pada problem optimasi berikut ini, yaitu menentukan (A_c, B_c, C_c, θ) yang meminimalkan $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$ dengan kendala (3.14) dimana $\theta \in \mathrm{N}^n$.

3.2. Syarat Cukup untuk Pelemahan Gangguan H_∞

Dalam subbab ini akan dinyatakan syarat cukup untuk karakterisasi pengontrol order penuh yang menjamin kestabilan lup tertutup, pelemahan gangguan H_∞ dan batas atas untuk criteria performansi H_2.

Untuk $Q, P, \hat{Q} \in \Re^{n\times n}$ dan $\alpha, \beta \geq 0$ didefinisikan notasi

$Q_a \cong QC^T + V_{12\infty}$,

$P_a \cong \left[B^T + \gamma^{-2}R_{02\infty}^T D_1^T + \gamma^{-2}R_{02\infty}^T(Q + \hat{Q}) \right] P + R_{12}^T$

, $S \cong \left(\alpha^2 I_n + \beta^2\gamma^{-2}\hat{Q}P \right)^{-1}$, dimana inversnya ada.

Remark 1. Misalkan (A_c, B_c, C_c, θ) memenuhi masalah minimasi $J(A_c, B_c, C_c, \theta)$, maka terdapat $Q, P, \hat{Q} \in \Re^{n\times n}$ yang memenuhi

$$0 = \left(A + \gamma^{-2}D_1R_{01\infty}\right)Q + Q\left(A + \gamma^{-2}D_1R_{01\infty}\right)^T + \gamma^{-2}QR_{1\infty}Q + V_{1\infty} - Q_aV_{2\infty}^{-1}Q_a^T \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} 0 = &\Big(A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS + \gamma^{-2}Q\left[R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right] + \gamma^{-2}\left[D_1R_{01\infty} - D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right]\Big)\hat{Q} \\ &+ Q\Big(A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS + \gamma^{-2}Q\left[R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right] + \gamma^{-2}\left[D_1R_{01\infty} - D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\right]\Big)^T \\ &+ \gamma^{-2}\hat{Q}\Big(R_{1\infty} - R_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS - S^TP_a\hat{R}_2^{-1}R_{12\infty}^T + \beta^2S^TP_a^t\hat{R}_2^{-1}P_aS\Big)\hat{Q} + Q_aV_{2\infty}^{-1}Q_a^T \end{aligned} \quad (3.23)$$

dengan

$$A_c = A - B\hat{R}_2^{-1}P_aS - Q_aV_2^{-1}C - Q_aV_{12\infty}^{-1}D\hat{R}_2^{-1}P_aS$$

$$+\gamma^{-2}\Big(QR_{1\infty}+D_1R_{01\infty}-D_1R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS$$
$$-QR_{12\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS-Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{01\infty}$$
$$+Q_aV_{2\infty}^{-1}D_2R_{02\infty}\hat{R}_2^{-1}P_aS\Big)$$
$$B_c=Q_aV_{2\infty}^{-1},\quad C_c=-\hat{R}_2^{-1}P_aS\ ,$$
$$\theta=\begin{bmatrix} Q+\hat{Q} & \hat{Q}\\ \hat{Q} & Q\end{bmatrix}$$

(3.24)-(3.27)

Lebih lanjut *auxiliary cost* diberikan dengan

$$J(A_c,B_c,C_c,\theta)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big] \tag{3.28}$$

Sebaliknya jika tedapat $Q,P,\hat{Q}\in \mathrm{N}^{\tilde{n}}$ yang memenuhi (3.22, 3.23), maka (A_c,B_c,C_c,θ) seperti (3.24-3.27) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.28).

Teorema 1. Misalkan terdapat $Q,P,\hat{Q}\in \mathrm{N}^{\tilde{n}}$ yang memenuhi (3.22,3.23) dengan (A_c,B_c,C_c,θ) seperti (3.24-3.27). Maka $(\tilde{A},\tilde{D})$ *stabilizable* jika dan hanya jika $\tilde{A}$ stabil asimtotik. Dalam kasus ini, fungsi alih lup tertutup $H(s)$ memenuhi kendala pelemahan gangguan $H_\infty\left(\|H(s)\|\le\gamma\right)$, dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$J(A_c,B_c,C_c)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big].$$

Bukti.

Bagian sebaliknya dari Remark 1 menunjukkan bahwa θ dari (3.32) memenuhi (3.14) dengan *auxiliary cost* seperti (3.32). Hal ini berarti menurut Lemma 1, kestabilan $(\tilde{A},\tilde{D})$ ekivalen dengan kestabilan asimtotik dari $\tilde{A}$. Sehingga pelemahan gangguan H_∞ terpenuhi dan performansi fungsional (3.7) memenuhi batas

$$J(A_c,B_c,C_c)=tr\Big[\big(Q+\hat{Q}\big)R_1-2R_{12}\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}+S^TP_a^T\hat{R}_2^{-1}R_2\hat{R}_2^{-1}P_aS\hat{Q}\Big]$$

■

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa, syarat cukup untuk mendesain pengontrol dengan kendala H_∞ pada suatu fungsi alih lup tertutup terdiri dari tiga persamaan aljabar Riccati yang dimodifikasi dalam variable $Q,P,\hat{Q}$.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Bernstein D.S, Haddad. (1989), *LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approac*', IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:293-305.

[2] Brockett, R.W. (1970), *Finite Dimensional Linear System*, John Willey and Sons, New York.

[3] Colaneri, P, Locatelli, A. (1997), *Control Theory and Design: An H_2 and H_∞ Viewpoint*, Academic Press.

[4] Doyle, J.C., Glover, K, Khargoneker, P.P. (1989), *State Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problem*, IEEE Trans. Automat. Control (34), pp:831-847.

[5] Doyle, J.C., Glover, K. (1988), *State Space Formulae for All Stabilizing Controller that Satisfy and H_∞ Norm Bound and Relation to Risk Sensitivity*, System Control Lett (11), pp: 161-171.

[6] Glover, K, Limebeer, Doyle, *A Charecterization of All Solution to The Four Block General Distance Problem*. Preprint.

[7] Wonham, W.M. (1979), Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-Verlag, New York.

[8] Zames, G. (1981), *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorm and Approximate Inverses*, IEEE Trans. Automat. Control (26), pp:301-320.

[9] Zhou, K, Doyle. (1998), *Essentials of Robust Contro*l, Prentice Hall International.